Лабораторная работа N5.

Алгоритм Брезенхема для генерации окружности.

Один из наиболее эффективных и простых для понимания алгоритмов генерации окружности принадлежит Брезенхему. Для начала заметим, что необходимо сгенерировать только одну восьмую часть окружности. Остальные ее части могут быть получены последовательными отражениями. Если сгенерирован первый октант (от 0° до 45° против часовой стрелки), то второй октант можно получить зеркальным отражением относительно прямой $y=x$, что дает в совокупности первый квадрант. Первый квадрант отражается относительно прямой $x=0$ для получения соответствующей части окружности во втором квадранте. Верхняя полуокружность отражается относительно прямой $y=0$ для завершения построения. На Рис. 1 приведены двумерные матрицы соответствующих преобразований.

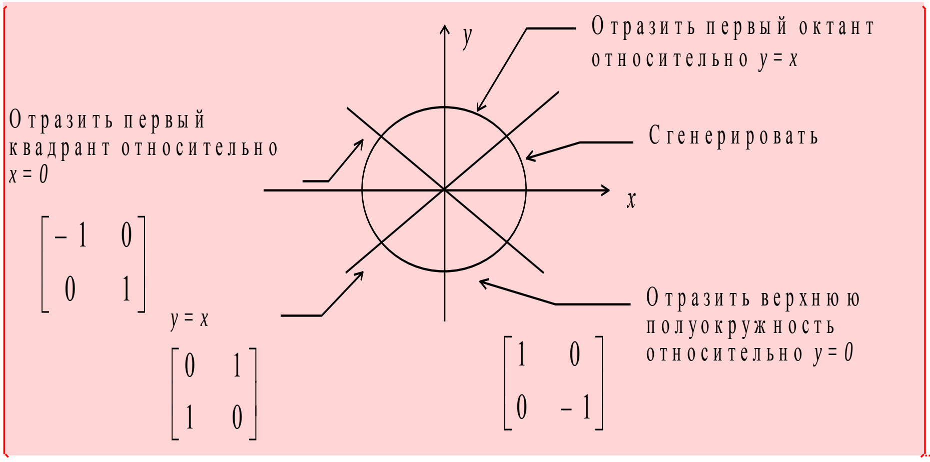

Рис. 1

Примечание [В.В.1]:

Для вывода алгоритма рассмотрим первую четверть окружности с центром в начале координат. Заметим, что если работа алгоритма начинается в точке $x=0$, $y=R$, то при генерации окружности по часовой стрелке в первом квадранте y является монотонно убывающей функцией аргумента x. Аналогично, если исходной точкой является $y=0$, $x=R$, то при генерации окружности против часовой стрелки x будет монотонно убывающей функцией аргумента y. В нашем случае выбирается генерация по часовой

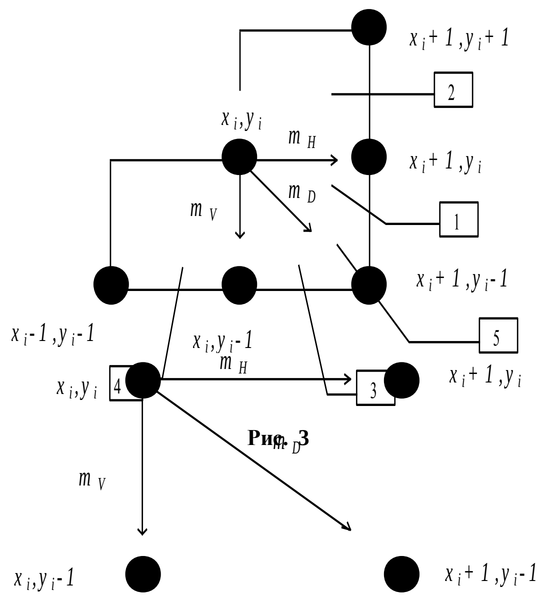

Рис. 2

стрелке с началом в точке $x=0$, $y=R$. Предполагается, что центр окружности и начальная точка находятся точно в точках растра.

Для любой заданной точки на окружности при генерации по часовой стрелке существует только три возможности выбрать следующий пиксел, наилучшим образом приближающий окружность: горизонтально вправо, по диагонали вниз и вправо, вертикально вниз. На Рис. 2 эти направления обозначены соответственно m_H,m_D,m_V.

Алгоритм выбирает пиксел, для которого минимален квадрат расстояния между одним из этих пикселов и окружностью, т. е. минимум из

$$m_H=|(x_i+1)^2+y_i^2-R^2|$$

$$m_D=|(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2|$$

$$m_V=|x_i^2+(y_i-1)^2-R^2|$$

Фактически, здесь минимизируется не квадрат расстояния, а абсолютное значение разности квадратов расстояний от центра окружности до пиксела и до окружности.

Вычисления можно упростить, если заметить, что в окрестности точки x_i, y_i возможны только пять типов пересечений окружности и сетки растра, приведенных на Рис. 3.

Разность между квадратами расстояний от центра окружности до диагонального пиксела x_i+1, y_i-1 и от центра до точки на окружности R^2 равна

$$\Delta_i=(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2$$

Для выбора соответствующего пиксела желательно использовать только знак ошибки, а не ее величину.

При $\Delta_i<0$ диагональная точка x_i+1, y_i-1 находится внутри реальной окружности, т. е. это случаи 1 или 2 на Рис. 3. Ясно, что в этой ситуации следует выбрать либо пиксел x_i+1, y_i, т. е. m_H, либо пиксел x_i+1, y_i-1, т. е. m_D. Для этого сначала рассмотрим случай 1 и проверим разность квадратов расстояний от окружности до пикселов в горизонтальном и диагональном направлениях:

$$\delta=|(x_i+1)^2+y_i^2-R^2|-|(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2|$$

При $\delta<0$ расстояние от окружности до диагонального пиксела m_D больше, чем до горизонтального m_H. Напротив, если $\delta>0$, расстояние до горизонтального пиксела m_H больше. Таким образом,

при $\delta\le 0$ выбираем m_H в x_i+1, y_i

при $\delta>0$ выбираем m_D в x_i+1, y_i-1

При $\delta=0$, когда расстояние от окружности до обоих пикселов одинаковы, выбираем горизонтальный шаг.

Количество вычислений, необходимых для оценки величины δ, можно сократить, если заметить, что в случае 1

$$(x_i+1)^2+y_i^2-R^2\ge 0$$
$$(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2<0$$

так как диагональный пиксел x_i+1, y_i-1 всегда лежит внутри окружности, а горизонтальный x_i+1, y_i - вне ее. Таким образом, δ можно вычислить по формуле

$$\delta=(x_i+1)^2+y_i^2-R^2+(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2$$

Дополнение до полного квадрата члена y_i^2 с помощью добавления и вычитания $-2y_i+1$ дает

$$\delta=2[(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2]+2y_i-1$$

В квадратных скобках стоит по определению Δ_i и его подстановка

$$\delta=2(\Delta_i+y_i)-1$$

существенно упрощает выражение.

Рассмотрим случай 2 на Рис. 3 и заметим, что здесь должен быть выбран горизонтальный пиксел x_i+1,y_i, так как y является монотонно убывающей функцией. Проверка компонент δ показывает, что

$$(x_i+1)^2+y_i^2-R^2<0$$
$$(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2<0$$

поскольку в случае 2 горизонтальный x_i+1,y_i и диагональный x_i+1,y_i-1 пикселы лежат внутри окружности. Следовательно,

$\delta<0$, и при использовании того же самого критерия, что и в случае 1, выбирается пиксел x_i+1,y_i.

Если $\Delta_i>0$, то диагональная точка x_i+1,y_i-1 находится вне окружности, т. е. это случаи 3 и 4 на Рис. 3. В данной ситуации ясно, что должен быть выбран либо пиксел x_i+1,y_i-1 т. е. m_D, либо x_i,y_i-1, т. е. m_V. Аналогично разбору предыдущего случая критерий выбора можно получить, рассматривая сначала случай 3 и проверяя разность между квадратами расстояний от окружности до диагонального m_D и вертикального m_V пикселов, т.е.

$$\delta=|(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2|-|x_i^2+(y_i-1)^2-R^2|$$

При $\delta<0$ расстояние от окружности до вертикального пиксела x_i,y_i-1 больше и следует выбрать диагональный шаг m_D, к пикселу x_i+1,y_i-1. Напротив, в случае $\delta>0$ расстояние от окружности до диагонального пиксела больше и следует выбрать вертикальное движение к пикселу x_i,y_i-1. Таким образом,

при $\delta\leq 0$ выбираем m_D в x_i+1,y_i-1

при $\delta>0$ выбираем m_V в x_i,y_i-1

Здесь в случае $\delta=0$, т.е. когда расстояния равны, выбран диагональный шаг.

Проверка компонент δ показывает, что

$$(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2\geq 0$$

$$x_i^2+(y_i-1)^2-R^2<0$$

поскольку для случая 3 диагональный пиксел x_i+1,y_i-1 находится вне окружности, тогда как вертикальный пиксел x_i,y_i-1 лежит внутри ее. Это позволяет записать δ в виде

$$\delta=(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2+x_i^2+(y_i-1)^2-R^2$$

Дополнение до полного квадрата члена x_i^2 с помощью добавления и вычитания $2x_i+1$ дает

$$\delta=2[(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2]-2x_i-1$$

Использование определения Δ_i приводит выражение к виду

$$\delta=2(\Delta_i-x_i)-1$$

Теперь, рассматривая случай 4, снова заметим, что следует выбрать вертикальный пиксел x_i,y_i-1, так как y является монотонно убывающей функцией при возрастании x. Проверка компонент δ для случая 4 показывает, что

$$(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2>0$$
$$x_i^2+(y_i-1)^2-R^2<0$$

поскольку оба пиксела находятся вне окружности. Следовательно, $\delta>0$ и при использовании критерия, разработанного для случая 3, происходит верный выбор m_V.

Осталось проверить только случай 5 на Рис. 3, который встречается, когда диагональный пиксел x_i+1,y_i-1 лежит на окружности, т. е. $\Delta_i=0$. Проверка компонент δ показывает, что

$$(x_i+1)^2+y_i^2-R^2>0$$
$$(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2=0$$

Следовательно, $\delta>0$ и выбирается диагональный пиксел x_i+1,y_i-1. Аналогичным образом оцениваем компоненты δ:

$$(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2=0$$

$$x_i^2+(y_i-1)^2-R^2<0$$

и $\delta<0$, что является условием выбора правильного диагонального шага к x_i+1,y_i-1. Таким образом, случай $\Delta_i=0$ подчиняется тому же критерию, что и случай $\Delta_i<0$ или $\Delta_i>0$.

Подведем итог полученных результатов:

$\Delta_i<0$

$\delta\le0$ выбираем пиксел $x_i+1,y_i \to m_H$

$\delta>0$ выбираем пиксел $x_i+1,y_i-1 \to m_D$

$\Delta_i>0$

$\delta\le0$ выбираем пиксел $x_i+1,y_i-1 \to m_D$

$\delta>0$ выбираем пиксел $x_i,y_i-1 \to m_V$

$\Delta_i=0$ выбираем пиксел $x_i+1,y_i-1 \to m_D$

Примечание [В.В.2]: Разобраться со штрихами над сигмой.

Легко разработать простые рекуррентные соотношения для реализации пошагового алгоритма. Сначала рассмотрим горизонтальный шаг m_H к пикселу x_i+1,y_i. Обозначим это новое положение пиксела как $i+1$. Тогда координаты нового пиксела и значение Δ_i равны

$$x_{i+1}=x_i+1$$
$$y_{i+1}=y_i$$
$$\Delta_{i+1}=(x_{i+1}+1)^2+(y_{i+1}-1)^2-R^2=x_{i+1}{}^2+2x_{i+1}+1+(y_i-1)^2-R^2=$$
$$=(x_i+1)^2+(y_i-1)^2-R^2+2x_{i+1}+1=\Delta_i+2x_{i+1}+1$$

Аналогично координаты нового пиксела и значение Δ_i для шага m_D к пикселу x_i+1,y_i-1 таковы:

$$x_{i+1}=x_i+1$$
$$y_{i+1}=y_i-1$$
$$\Delta_{i+1}=\Delta_i+2x_{i+1}-2y_{i+1}+2$$

То же самое для шага m_V к x_i,y_i-1

$$x_{i+1}=x_i$$
$$y_{i+1}=y_i-1$$
$$\Delta_{i+1}=\Delta_i-2y_{i+1}+1$$

При генерации окружности для уменьшения вычислительной сложности и улучшения наглядности целесообразно использовать растр 32 х 32. Если есть устройство с большим разрешением, то в качестве единицы надо использовать группу пикселов. Следует подобрать группу пикселов, как можно более близкую к квадратной.

Задание

Написать программу для разложения в растр окружности радиусом $R=15$ на растре 32 х 32.