

Лабораторная работа N 2.

Вращение многоугольника.

Пусть необходимо повернуть точку $P(x,y)$ вокруг начала координат O на угол φ . Изображение новой точки на Рис. 1 обозначим через $P'(x',y')$. Существуют четыре числа a,b,c,d такие, что новые

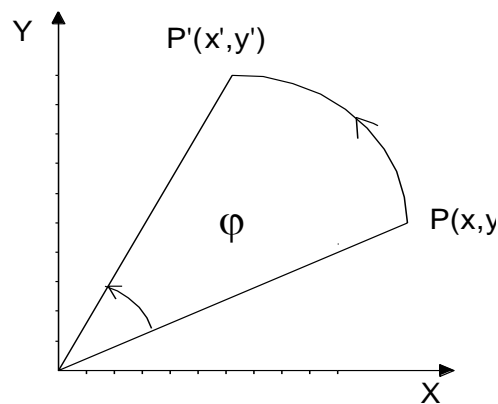


Рис. 1

координаты x' и y' могут быть вычислены по значениям старых координат x и y из следующих уравнений:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (1.1)$$

Для получения значений a,b,c,d рассмотрим вначале точку $(x,y)=(1,0)$. Таким образом из уравнения (1.1) получим

$$\begin{aligned} x' &= a \\ y' &= c \end{aligned}$$

Но в этом случае, как видно из Рис. 2, значения x' и y' равны соответственно $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

Тогда будем иметь

$$a = \cos(\varphi)$$

$$c = \sin(\varphi)$$

Аналогичным образом из Рис. 3 следует

$$b = -\sin(\varphi)$$

$$d = \cos(\varphi)$$

Тогда вместо системы уравнений (1.1) можем записать

$$\begin{aligned} x^1 &= x \cos(\varphi) - y \sin(\varphi) \\ y^1 &= x \sin(\varphi) + y \cos(\varphi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Систему (1.2) можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x^1 & y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

или с использованием вектора - столбца:

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

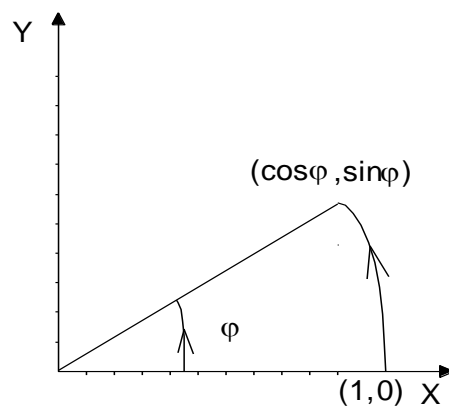


Рис. 2

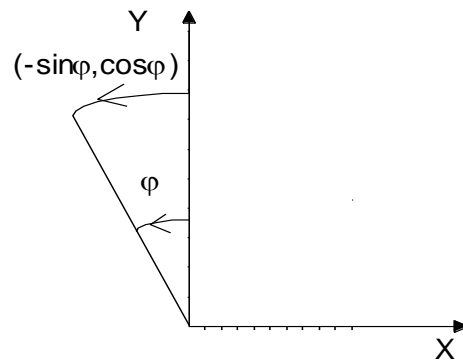


Рис. 3

Система уравнений (1.2) описывает поворот вокруг точки O - начала системы. Если требуется выполнить поворот относительно заданной точки x_0, y_0 , то в этих уравнениях нужно заменить: x на $x - x_0$, y на $y - y_0$, x' на $x' - x_0$, y' на $y' - y_0$:

$$\begin{cases} y' - y_0 = (x - x_0) \sin(\varphi) + (y - y_0) \cos(\varphi) \\ x' - x_0 = (x - x_0) \cos(\varphi) - (y - y_0) \sin(\varphi) \\ x' = x_0 + (x - x_0) \cos(\varphi) - (y - y_0) \sin(\varphi) \\ y' = y_0 + (x - x_0) \sin(\varphi) + (y - y_0) \cos(\varphi) \end{cases} \quad (1.3)$$

Систему уравнений (1.3) можно записать в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Задание

Разработать алгоритм и написать программу, реализующую вращение многоугольника вокруг произвольной точки.